

LXIV олимпиада по математике учащихся Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 17 января 2017 года
XI класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найди все пары целых чисел $(a; b)$ для которых выполняется равенство

$$ab = a^2 + b$$

2. Расстояние между станциями A и B равно s км. Поезд вышел со станции A в направлении станции B на t минут позже запланированного срока. Для того, чтобы попасть на станцию B в соответствии с первоначальным графиком, поезд должен был увеличить среднюю скорость на p км/ч, в результате чего прибыл на станцию B своевременно. Какой была бы средняя скорость поезда, если бы он выехал своевременно со станции A и двигался бы в соответствии с расписанием?
3. Доказать, что $2^n > n^2$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 4$.
4. В треугольнике ABC высота AN делит медиану BM пополам. Докажите, что в треугольнике BMC также найдется высота, которая делит медиану пополам.
5. В мешке находятся 2017 монет. Юрий и Петр играют в игру, в которой они по очереди берут из мешка монеты. За один раз игрок может взять из мешка 7, 9 или 11 монет. Если игрок не может взять из мешка по крайней мере 7 монет, то он проигрывает. Кто из игроков выиграет, если начинает игру Юрий и оба игрока в игре придерживаются оптимальной стратегии?